

## Космологическая постоянная и черные дыры

А.О. Шишанин

НИУ МЭИ, Москва, Россия

Примерно 15 лет было замечено [1], [2], что в присутствии космологической постоянной  $\Lambda$  в первом законе термодинамики черных дыр появляется слагаемое с давлением  $p$ . При этом массу  $M$  черной дыры естественно отождествить с энтальпией  $H$ . Тогда первый закон термодинамики для заряженной вращающейся черной дыры с зарядом  $Q$  и моментом импульса  $J$  примет вид

$$dH = dM = TdS + Vdp + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (1)$$

где  $\Phi$  - потенциал,  $\Omega$  - угловая скорость. В системе единиц  $\hbar = c = G = k = 1$  в (3+1)-мерном пространстве-времени

$$p = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad S = \frac{A}{4} = \pi r_H^2, \quad T = \frac{f'(r_H)}{8\pi}.$$

Здесь  $f(r)$  определяет метрику

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2,$$

а  $r_H$ - радиус горизонта событий, который находится как наибольший корень уравнения  $f(r) = 0$ . Экстремальная черная дыра определяется условиями  $f(r) = f'(r) = 0$ .

Черная дыра АдС-Шварцшильда

Рассмотрим для примера (3+1)-мерную черную дыру с метрикой АдС-Шварцшильда [3] ( $\Lambda < 0$ ), где

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2.$$

Радиус горизонта событий  $r_H$  можно найти из уравнения

$$\frac{\Lambda}{3}r_H^3 - r_H + 2M = 0.$$

Первый закон термодинамики черных дыр здесь будет иметь вид

$$dM = TdS + pdV.$$

Масса выражается через энтропию и давление как

$$M = \frac{r_H}{2} \left( 1 - \frac{\Lambda}{3}r_H^2 \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \left( 1 + \frac{8SP}{3} \right).$$

Температура и объем вычисляются дифференцированием массы  $M$ . В результате для них можно прийти к следующим соотношениям:

$$T = \left( \frac{\partial M}{\partial S} \right)_p = \frac{1}{4\sqrt{\pi S}} (1 + 8PS) = \frac{1 - \Lambda r_H^2}{4\pi r_H},$$

$$V = \left( \frac{\partial M}{\partial p} \right)_S = \frac{4S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} = \frac{4\pi r_H^3}{3}.$$

Преобразованием Лежандра можно получить внутреннюю энергию  $E$

$$E = H - pV = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Если в формулу для температуры подставить объем и давление, то можно вывести уравнение состояния

$$p = \alpha T V^{-\frac{1}{3}} - \beta V^{-\frac{2}{3}}, \quad \alpha = \left( \frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{3}}, \beta = \frac{1}{2(36\pi)^{\frac{1}{3}}}.$$

Анализ критического состояния этого уравнения дает, что фазового перехода здесь не происходит.

### BTZ-черная дыра

В (2+1)-мерной гравитации Эйнштейна с электромагнитным полем [4],[5] есть решение в виде BTZ-метрики:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \left( d\phi - \frac{4J}{r^2} dt \right)^2,$$

$$f(r) = -8M + \frac{r^2}{L^2} + \frac{16J^2}{r^2} - 8\pi Q^2 \ln \frac{r}{L},$$

где  $L^2 = -\frac{1}{\Lambda}$ ,  $Q$  - заряд черной дыры. В случае  $J = 0$  экстремальная черная дыра определяется трансцендентным уравнением

$$2M = \pi Q^2 (1 - \ln(4\pi Q^2)).$$

Обычная BTZ-метрика [6], [7], когда  $Q = 0$ . Для экстремальной черной дыры здесь выполняется условие  $J = LM$ . Если проделать вычисления аналогичные метрике АдС-Шварцшильда, то можно получить уравнение состояния в виде

$$p = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{T}{\sqrt{V}} + \frac{2\pi J^2}{V^2}.$$

Для  $Q \neq 0$  уравнение состояния приобретает довольно громоздкий вид. В неявном виде оно выглядит как

$$T = \frac{8pS^4 - 8\pi^2 Q^2 S^2 - \pi^3 J^2}{\pi S^3}, \quad S = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{V + \frac{4\pi Q^2}{p}}.$$

Отметим, что BTZ-черные дыры привлекают к себе огромный интерес. В частности, из-за ее связи с двумерной конформной теорией поля. Для их исследования можно применить методы квантовой теории поля. Более реалистичные черные дыры, например многомерные керр-ньюмановские черные дыры, имеют еще более громоздкие термодинамические величины.

## Список литературы

- [1] D. Kastor, S. Ray and J. Traschen. *Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes*. Class.Quant.Grav., 2009, vol. 26, p. 195011. e-print: 0904.2765 [hep-th].
- [2] B.P. Dolan. *The cosmological constant and black hole thermodynamic potentials*. Class.Quant.Grav., 2011, vol. 28, p. 125020. e-print: 1008.5023 [gr-qc].
- [3] S.W. Hawking, D.N. Page. *Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space*. Commun. Math. Phys., 1983, vol. 87, pp. 577-588. <https://doi.org/10.1007/BF01208266>.
- [4] C. Martinez, C. Teitelboim and J. Zanelli. *Charged Rotating Black Hole in Three Spacetime Dimensions*. Phys. Rev. D, 2000, vol. 61, p. 104013. e-print: hep-th/9912259.
- [5] A. Achúcarro and M. E. Ortiz. *Relating black holes in two-dimensions and three-dimensions*. Phys.Rev.D, 1993, vol. 48, pp. 3600-3605. e-print: hep-th/9304068.
- [6] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli. *The Black hole in three-dimensional space-time*. Phys.Rev.Lett., 1992, vol. 69, pp. 1849–1851. e-print: hep-th/9204099.
- [7] S. Carlip. *The (2+1)-Dimensional black hole*. Class.Quant.Grav., 1995, vol. 12, pp. 2853-2880. e-print: gr-qc/9506079 [gr-qc].