

# ON MECHANICAL CONSERVATION LAWS IN 5-DIMENSIONAL THEORY OF GRAVITY

A. V. Aminova, D. R. Khakimov

*E-mail address:* asya.aminova@kpfu.ru

*E-mail address:* dzhamoliddink@mail.ru

(Kazan (Volga Region) Federal University)

We study five-dimensional  $h$ -spaces of type {41}, define their metrics, establish necessary and sufficient conditions for the existence of projective motions of the same type and the corresponding first integrals of geodesic equations. The Eisenhart equations are integrated using the Aminova method of the skewnormal frame. It is easy to verify that the first quadratic integral of the geodesic equation is associated with each solution  $h$  of the Eisenhart equation

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

By symmetrizing this equation over all three indices we have

$$q_{(ij,k)} = 0$$

where

$$q_{ij} \equiv 4\varphi g_{ij} - h_{ij}.$$

If  $\gamma$  is the geodesic in  $M^n$ , then the field of its tangent vectors  $\dot{\gamma}$  is parallel along  $\gamma$ . Accordingly, the quantity  $q(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  remains constant along each geodesic  $\gamma$  in  $M^n$ , i.e.  $q(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  is the first integral of the geodesic equations.

It should be noted that the quadratic first integral  $(4\varphi g - h)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \text{const}$  of the geodesic equations in five-dimensional pseudo-Riemannian manifold defines the mechanical conservation law in the 5-dimensional theory of gravity.

*Keywords:* Eisenhart equation, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold,  $h$ -space of the type {41}.

## О МЕХАНИЧЕСКИХ ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ В 5-МЕРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Аминова А. В., Хакимов Д. Р.

Исследуются пятимерные псевдоримановы  $h$ -пространства  $M^5$  типа {41}, определяются их метрики, устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективных движений того же типа и соответствующие первые интегралы уравнений геодезических. Уравнения Эйзенхарта интегрируются с помощью метода косонормального репера Аминовой. Каждому решению  $h$  уравнения Эйзенхарта соответствует первый квадратичный интеграл уравнения геодезических

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

Симметризуя это уравнение по всем трем индексам, получаем

$$q_{(ij,k)} = 0,$$

где

$$q_{ij} \equiv 4\varphi g_{ij} - h_{ij}.$$

Если  $\gamma$  – геодезическая в  $M^5$ , то поле ее касательных векторов  $\dot{\gamma}$  параллельно вдоль  $\gamma$ . Соответственно величина  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  остается постоянной вдоль каждой геодезической  $\gamma$  в  $M^5$ , т.е. является первым интегралом уравнений геодезических.

Важно отметить, что квадратичный первый интеграл  $(4\varphi g - h)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \text{const}$  уравнений геодезических в  $M^5$  определяет механический закон сохранения в 5-мерной теории гравитации.

*Ключевые слова:* уравнение Эйзенхарта, пятимерное псевдориманово многообразие,  $h$ -пространство типа  $\{41\}$ .