

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ГРАВИТАЦИИ  
Специальность (Направление): 03.04.02 - физика  
Специализация: гравитация и теория относительности

*Спонтанная поляризация цветного  
динамического эфира  
и проблема аксионной  
хромодинамики*

**Студент-Киселев Глеб гр.06-019.**

**Научный руководитель- профессор, д.ф-м.н.  
Балакин Александр Борисович**

Казань-2022

# Введение

- Теория динамического эфира.

(T. Jacobson and D. Mattingly, Gravity with a dynamical preferred frame, Phys. Rev. D 64, 024028(2001)).

- Цветной динамический эфир.

(Balakin A. B., Andreyanov A. V. SU (N)-symmetric dynamic aether: General formalism and a hypothesis on spontaneous color polarization //arXiv preprint arXiv:1803.04992. – 2018.).

- Спонтанная цветовая поляризация.

(Balakin A., Kiselev G. Spontaneous color polarization as a modus originis of the dynamic aether //Universe. – 2020. – Т. 6. – №. 7. – С. 95.).

- Аксионная хромодинамика с цветным эфиром.

(Peccei R. D., Quinn H. R. CP conservation in the presence of pseudoparticles //Physical Review Letters. – 1977. – Т. 38. – №. 25. – С. 1440.)

# Цель

- ✓ Описание формализма аксионного расширения теории Эйнштейна-Янга-Миллса, связанной с псевдоскалярным (аксионным) полем и единичным времениподобным векторным полем эфира с дальнейшим применением к модели спонтанной поляризации цветного эфира в ранней Вселенной.
- ✓ Получение уравнений, связанных с развитием аксионной хромодинамики с приложениями к моделям эволюции ранней анизотропной Вселенной, заполненной взаимодействующими калибровочными и векторными полями.
- ✓ Приведение точных решений в рамках различных моделей анизотропной Вселенной Бианки и их анализ.

# Формализм цветного эфира

Функционал действия с симметричным относительно группы SU(N) лагранжианом:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \left[ R + 2\Lambda + \lambda \left( g_{mn} U_{(a)}^m U^{n(a)} - 1 \right) + \mathcal{K}_{(a)(b)}^{ijmn} \hat{D}_i U_m^{(a)} \hat{D}_j U_n^{(b)} \right] + \frac{1}{4} F_{mn}^{(a)} F^{mn(a)} \right\}.$$

- $g = \det(g_{ik})$ ,
- R- скаляр Риччи (скалярная кривизна),
- $\Lambda$ - космологическая постоянная,
- $\mathcal{K}_{(a)(b)}^{ijmn}$  - тензор Джекобсона,  

$$\mathcal{K}_{(a)(b)}^{ijmn} = G_{(a)(b)} \left[ C_1 g^{ij} g^{mn} + C_2 g^{im} g^{jn} + C_3 g^{in} g^{jm} \right] + C_4 U_{(a)}^i U_{(b)}^j g^{mn}$$
- $F_{mn}^{(a)} = \nabla_m A_n^{(a)} - \nabla_n A_m^{(a)} + \mathcal{G} f_{(b)(c)}^{(a)} A_m^{(b)} A_n^{(c)}$  - тензор напряженности поля Янга-Миллса,
- $\lambda$  – множитель Лагранжа,
- $\hat{D}_m U_n^{(a)} \equiv \nabla_m U_n^{(a)} + \mathcal{G} f_{(b)(c)}^{(a)} A_m^{(b)} U_n^{(c)}$  - расширенная производная.

Уравнения калибровочного поля:

$$\hat{D}_k F_{(a)}^{ik} = \Gamma_{(a)}^i$$

$$\Gamma_{(a)}^i = \frac{\mathcal{G}}{\kappa} f_{(c)(a)}^{(d)} U_k^{(c)} \mathcal{K}_{(d)(b)}^{imkn} \hat{D}_m U_n^{(b)}$$

Уравнения векторного поля:

$$\hat{D}_i \mathcal{J}_{(a)}^{ij} = \lambda U_{(a)}^j + \mathcal{I}_{(a)}^j$$

$$\mathcal{J}_{(a)}^{ij} = \mathcal{K}_{(a)(b)}^{imjn} \hat{D}_m U_n^{(b)} = C_1 \hat{D}^i U_{(a)}^j + C_2 g^{ij} \hat{D}_m U_{(a)}^m + C_3 \hat{D}^j U_{(a)}^i + C_4 U_{(a)}^i U_{(b)}^m \hat{D}_m U^j{}^{(b)},$$

$$\mathcal{I}_{(a)}^j = C_4 \hat{D}^j U_{m(a)} U_{(b)}^n \hat{D}_n U^m{}^{(b)}.$$

Уравнения гравитационного поля:

$$R_{pq} - \frac{1}{2} R g_{pq} = \Lambda g_{pq} + \lambda U_p^{(a)} U_{(a)q} + T_{pq} + T_{pq}^{(\text{YM})}$$

$$T_{pq} = \frac{1}{2} g_{pq} \mathcal{K}_{(a)(b)}^{ijmn} \hat{D}_i U_m^{(a)} \hat{D}_j U_n^{(b)} +$$

$$T_{pq}^{(\text{YM})} = \frac{1}{4} g_{pq} F_{mn}^{(a)} F_{(a)}^{mn} - F_{pm}^{(a)} F_{qn}^{(a)} g^{mn}.$$

$$+ C_1 \left[ \hat{D}_m U_p^{(a)} \hat{D}^m U_{q(a)} - \hat{D}_p U^{m(a)} \hat{D}_q U_{m(a)} \right] + C_4 U_{(a)}^m \hat{D}_m U_p^{(a)} U_{(b)}^n \hat{D}_n U_q^{(b)} +$$

$$+ G_{(a)(b)} \hat{D}^m \left[ U_{(p}^{(b)} \mathcal{J}_{q)m}^{(a)} - \mathcal{J}_{m(p}^{(a)} U_{q)}^{(b)} - \mathcal{J}_{(pq)}^{(a)} U_m^{(b)} \right].$$

# Тензор цветовой поляризации

$$H^{(a)(b)} \equiv g^{pq} U_p^{(a)} U_q^{(b)}$$

Т.к. матрица симметрична, можно найти собственные вектора и собственные значения:

$$H_{(b)}^{(a)} q_{\{\alpha\}}^{(b)} = \sigma_{\{\alpha\}} q_{\{\alpha\}}^{(a)} .$$

Поскольку  $H_{(a)}^{(a)} = G_{(a)(b)} g^{mn} U_m^{(a)} U_n^{(b)} = 1$  , получаем  $\sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \sigma_{\{\alpha\}} = 1$  .

- Если все  $\sigma_{\{\alpha\}}$  равны друг другу  $\longrightarrow$  цветовой аналог естественного света.
- Если все  $\sigma_{\{\alpha\}}$  , кроме одного, равны 0  $\longrightarrow$  цветовой аналог линейно поляризованного света.

Отсюда критерий цветовой поляризации:  $\det H^{(a)(b)} = 0$  .

# Гипотеза о спонтанной цветовой поляризации

В результате фазового перехода  $U_{(a)}^i$  и  $A_i^{(a)}$  становятся параллельными цветовым векторам  $q_{(a)}$  и  $Q^{(a)}$ :

$$\boxed{U_{(a)}^i = q_{(a)} U^i}, \quad \boxed{A_i^{(a)} = Q^{(a)} A_i} .$$

Тензор цветовой поляризации:

$$H^{(a)(b)} = q^{(a)} q^{(b)} .$$

Условие нормировки и уравнение на собственные вектора и собственные значения:

$$G_{(a)(b)} q^{(a)} q^{(b)} = 1 , \quad H_{(b)}^{(a)} q^{(b)} = q^{(a)} .$$

Метрика Бианки-I:

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2}$$

## Редуцированные уравнения калибровочного поля

Поскольку  $A_i^{(a)} \rightarrow Q^{(a)} A_i$ , получаем квазимаксвелловский тензор:

$$F_{mn}^{(a)} = Q^{(a)} [\nabla_m A_n - \nabla_n A_m].$$

$$\Gamma_{(a)}^i = \frac{\mathcal{G}}{\kappa} (C_1 + C_2 + C_3) U^i f_{(d)(c)(a)} q^{(c)} \left[ \dot{q}^{(d)} - \mathcal{G} f_{(d)(b)(h)} Q^{(b)} q^{(h)} U^m A_m \right] -$$

$$- \frac{\mathcal{G}^2}{\kappa} C_1 A^k (\delta_k^i - U^i U_k) f_{(c)(a)}^{(d)} q^{(c)} f_{(d)(b)(h)} Q^{(b)} q^{(h)}.$$

При фазовом переходе  $\Gamma_{(a)}^i$  обращается в ноль, тогда:  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ ,  $A_i = 0$ .

## Редуцированные уравнения векторного поля

При  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$  и  $A_i = 0$ , полевые уравнения на  $U_{(a)}^j$  сводятся к:

$$q_{(a)} C_2 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) = \lambda q_{(a)}$$

Отсюда получаем решение:

$$\lambda = C_2 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right)$$



# Редуцированные уравнения гравитационного поля

С учетом полученных результатов можно рассмотреть выражение для тензора энергии-импульса

$$T_q^p = C_2 \left\{ -\delta_q^p \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} \right) + \right. \\ \left. + \delta_1^p \delta_q^1 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} \right) + \delta_2^p \delta_q^2 \left( \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right) + \delta_3^p \delta_q^3 \left( \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} \right) \right\} .$$

С учетом ранее полученного выражения для  $\lambda$  получаем систему уравнений:

$$\left[ \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} \right] (1 + C_2) = \Lambda, \quad \left[ \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} \right] (1 + C_2) = \Lambda,$$

$$\left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} \right] (1 + C_2) = \Lambda, \quad \left[ \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}\dot{a}}{ba} \right] (1 + C_2) = \Lambda.$$

Симметрия данной системы уравнений позволяет получить решение для  $\Theta(t)$  как функции от времени, исходя из уравнения:

$$\dot{\Theta} + \Theta^2 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + 2 \left[ \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} \right].$$

Используя ранее полученную систему, получим уравнение:

$$\dot{\Theta} + \Theta^2 = \frac{3\Lambda}{1 + C_2}.$$

Решение:

$$\Theta(t) = 3H_0 \left\{ \frac{\Theta(t_0) \operatorname{ch}[3H_0(t - t_0)] + 3H_0 \operatorname{sh}[3H_0(t - t_0)]}{\Theta(t_0) \operatorname{sh}[3H_0(t - t_0)] + 3H_0 \operatorname{ch}[3H_0(t - t_0)]} \right\}, \quad H_0 \equiv \sqrt{\frac{\Lambda}{3(1 + C_2)}}.$$

В результате функция  $\Theta(t)$  начинается со значения  $\Theta(t_0)$  и заканчивается значением  $3H_0$  при  $t \rightarrow \infty$ , регулярна на интервале  $t_0 < t < \infty$

при  $|\Theta(t_0)| < 3H_0$ , а также монотонна,  $\dot{\Theta} > 0$ .

При  $\Theta(t_0) = 3H_0$  решение  $\Theta(t) = 3H_0$ .

## Уравнения прецессии (динамики цветового вектора $q^{(a)}$ )

Прецессия цветового вектора  $q^{(a)}$  вокруг  $Q^{(a)}$ , описывается обобщёнными уравнениями Вонга:

$$U^m \hat{D}_m q^{(a)} = \mathcal{F}^{(a)}$$

В анизотропной модели Бианки-1 получаем:

$$\dot{q}^{(a)} = \nu(t) \left[ Q^{(a)} - q^{(a)} q^{(b)} Q^{(b)} \right].$$

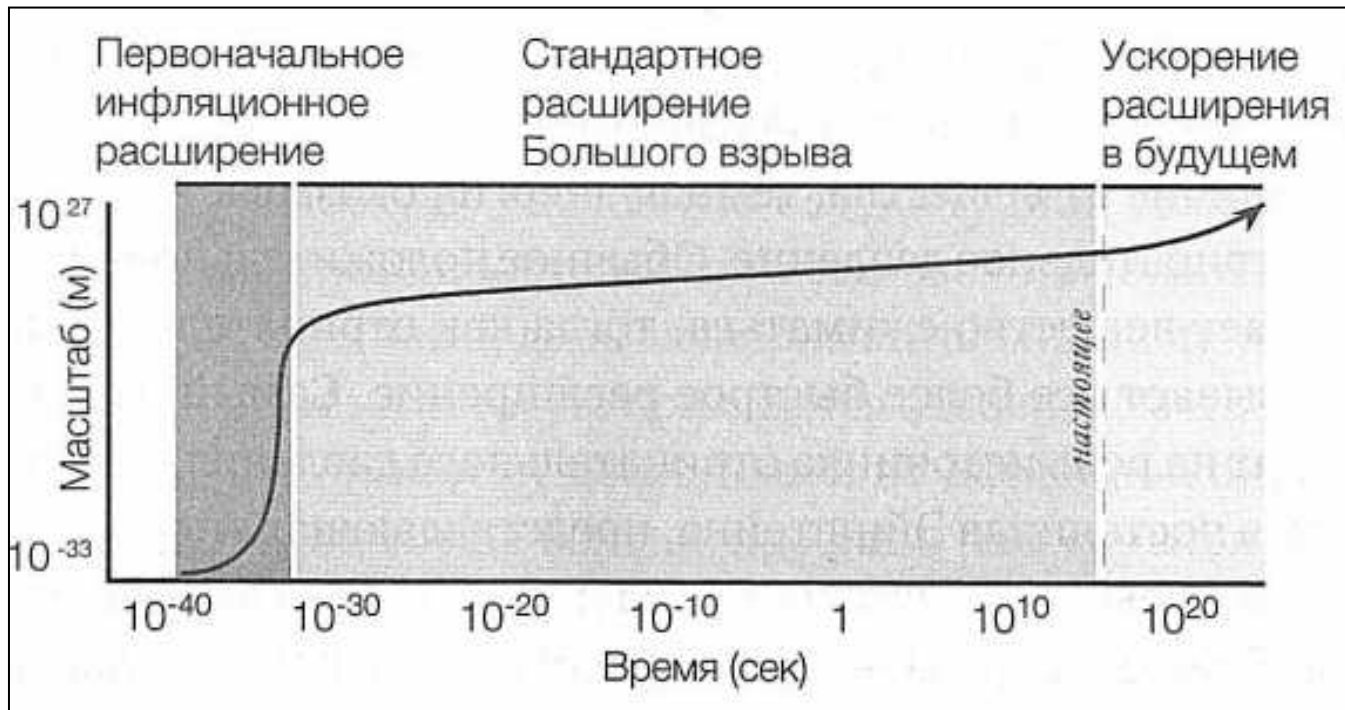
$$\nu(t) = 2\gamma T_* \Theta(t) \frac{V^2}{[V_*^2 - V^2(t)]^{1+\gamma}}$$

$$T(t) = T_* \left\{ \frac{1}{[V_*^2 - V^2(t)]^\gamma} - \frac{1}{[V_*^2 - 1]^\gamma} \right\}, \quad V(t) = \frac{1}{3H_0} \{ \Theta(t_0) \operatorname{sh}[3H_0(t - t_0)] + 3H_0 \operatorname{ch}[3H_0(t - t_0)] \}$$

Отсюда 2 решения в виде констант:  $q^{(a)}(t) = \pm Q^{(a)}$ , означающие выстраивание векторов параллельно или антипараллельно, что в свою очередь говорит о завершении фазового перехода.

# График расширения Вселенной

Наглядно данный фазовый переход можно интерпретировать как точку перегиба от ускоренного к замедленному



Knocking on Heaven's Door: How Physics and Scientific Thinking Illuminate the Universe and the Modern World./Lisa Randall // Ecco. 2011—464 p.

# Функционал действия цветного эфира с аксионным полем

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \left[ R + 2\Lambda + \lambda \left( U_{(a)}^m U_m^{(a)} - 1 \right) + \mathcal{K}_{(a)(b)}^{ijmn} \hat{D}_i U_m^{(a)} \hat{D}_j U_n^{(b)} \right] + \frac{1}{4} F_{(a)}^{mn} \left( F_{mn}^{(a)} + \sin\phi F_{mn}^{*(a)} \right) + \frac{1}{2} \Psi_0^2 \left[ V(\phi, \Phi_*) - g^{mn} \nabla_m \phi \nabla_n \phi \right] \right\} .$$

$g = \det(g_{ik})$ ,

$R$ - скаляр Риччи (скалярная кривизна),

$\Lambda$ - космологическая постоянная,

$F_{mn}^{(a)} = \nabla_m A_n^{(a)} - \nabla_n A_m^{(a)} + \mathcal{G} f_{(b)(c)}^{(a)} A_m^{(b)} A_n^{(c)}$  - тензор напряженности поля Янга-Миллса,

$\phi$  -псевдоскалярное (аксионное) поле,

$g_{(A\gamma\gamma)} = \frac{1}{\Psi_0}$  -константа аксион-фотонной связи,  $g_{(A\gamma\gamma)} < 1.47 \times 10^{-10} \text{GeV}^{-1}$

$V(\phi, \Phi_*) = \frac{m_A^2 \Phi_*^2}{2\pi^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi\phi}{\Phi_*} \right) \right]$  -потенциал аксионного поля.

## Анизотропная космологическая модель Бианки-I

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2$$

## Анизотропная космологическая модель Бианки-VI

(с выделенной осью Z):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)e^{-2mz}dx^2 - b^2(t)e^{2nz}dy^2 - c^2(t)dz^2.$$

$$(m = n).$$

## Уравнения цветных векторных полей:

$$\boxed{\hat{D} \mathcal{J}_{(a)}^{ij} = \lambda U_{(a)}^j + \mathcal{I}_{(a)}^j.}$$

$$\mathcal{I}_{(a)}^j = C_4 d_m (\hat{D}^j U_{(a)}^m) - \frac{1}{2} \kappa \psi_0^2 \hat{D}^j \left[ \frac{\partial V}{\partial \Phi_*} \frac{d\Phi_*}{d\Theta} \right].$$

$$(d^k \equiv U^n \nabla_n U^k),$$

$$\mathcal{J}_{(a)}^{ij} = \tilde{K}_{(a)(b)}^{imjn} \hat{D}_m U_n^{(b)},$$

$$\tilde{K}_{(a)(b)}^{imjn} = K_{(a)(b)}^{imjn} + \kappa \psi_0^2 G_{(a)(b)} g^{im} g^{jn} \frac{\partial V}{\partial \Omega^2}$$

## Уравнения калибровочного поля:

$$\boxed{\hat{D}_k F_{(a)}^{ik} = \Gamma_{(a)}^i - F_{(a)}^{*ik} \cos \phi \nabla_k \phi,} \quad \boxed{\hat{D}_k {}^* F_{(a)}^{ik} = 0}$$

$$\Gamma_{(a)}^i = \frac{\mathcal{G}}{\kappa} f_{(c)(a)}^{(d)} U_k^{(c)} \mathcal{K}_{(d)(b)}^{imkn} \hat{D}_m U_n^{(b)}$$

## Уравнения аксионного поля:

$$\nabla_m \nabla^m \phi + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{1}{4\psi_0^2} F_{mn}^{*(a)} F_{(a)}^{mn} \cos \phi.$$

В Бианки-VI: считаем потенциалы полей мультипликативными

$$A_1 = T_1(t)e^{\alpha_1 z} - yH_0; A_2 = T_2(t)e^{\alpha_2 z}; A_3 = T_3(t)e^{\alpha_3 z}; \phi = T(t)e^{\alpha z}$$

Отсюда получаем:

$$\ddot{T} + \left[ \frac{d}{dt} (\ln f) + \frac{H_0}{\psi_0^2 abc} \right] \dot{T} - \frac{\alpha^2}{c^2} T + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$f = abc$$

## Уравнения гравитационного поля:

$$R_{pq} - \frac{1}{2} R g_{pq} = \Lambda g_{pq} + \lambda U_p^{(a)} U_{(a)q} + T_{pq} + T_{pq}^{(YM)} + T_{pq}^{(V)} + \kappa T_{pq}^{(A)}$$

$$T_{pq}^{(A)} = \Psi_0^2 \left[ \nabla_p \phi \nabla_q \phi + \frac{1}{2} g_{pq} (V - \nabla_n \phi \nabla^n \phi) \right],$$

$$T_{pq}^{(V)} = -\frac{1}{2} \psi_0^2 g_{pq} \hat{D}_j U_{(a)}^i \hat{D}_i [U^{j(a)} \frac{\partial V}{\partial \Phi_*} \frac{d\Phi_*}{d\Theta}].$$



# Заключение

- Рассмотрена теория Эйнштейна-Янга-Миллса с гипотезой о спонтанной цветовой поляризации, выведены основные редуцированные полевые уравнения и получены их точные решения с физическими приложениями.
- Рассмотрена теория Эйнштейна-Янга-Миллса с наличием аксионного расширения, связанной с псевдоскалярным (аксионным) полем и единичным времениподобным векторным полем эфира, т.е. переход в аксионную хромодинамику, а также получены основные уравнения.
- Для получения точных решений намечена тенденция расчета системы основных уравнений в рамках космологических моделей Бианки, а также будет рассмотрен механизм спонтанной цветовой поляризации с учетом данных модификаций (в рамках аксионной хромодинамики).

## Публикации по результатам работы

1. Balakin A. B.; Kiselev G. B. Spontaneous Color Polarization as A Modus Originis of the Dynamic Aether // Universe, 2020. – V.6. – P. 95.
2. Г. Б. Киселев. Цветной динамический эфир // Сборник тезисов итоговой научно-образовательной конференции студентов КФУ. - Казань: Изд-во Казанского университета, 2020, с. 857.
3. Г. Б. Киселев. Спонтанная поляризация в цветном динамическом эфире // Сборник тезисов итоговой научно-образовательной конференции студентов КФУ. - Казань: Изд-во Казанского университета, 2021, с. 1634.
4. Г. Б. Киселев. Спонтанная поляризация в цветном динамическом эфире // Сборник тезисов докладов участников четвертой Международной научной конференции .Наука будущего. и шестого Всероссийского молодежного научного форума .Наука будущего - наука молодых.. - Москва: Министерство науки и высшего образования РФ, ООО .Инконсалт К., 2021, с. 168.

# ИСТОЧНИКИ

- 1) Balakin, A.; Kiselev, G. Spontaneous Color Polarization as A *Modus Originis* of the Dynamic Aether. *Universe* **2020**, 6, 95.
- 2) Balakin, A.B. SU(N) - symmetric dynamic aether: General formalism and a hypothesis on spontaneous color polarization/A.B.Balakin, A.V.Andreyanov.- *Space, Time and Fund. Interact.*, 2017, No.4, pp.36-58.
- 3) Eling, C. Two-dimensional gravity with a dynamical aether/Christopher Eling, Ted Jacobson- *Phys.Rev.D74:084027,2006* - p.11.
- 4) Madhurima, B. Gravitational collapse and formation of universal horizons in Einstein-aether theory/B.Madhurima, S.Mukohyama, A. Wang.- *Phys. Rev. D* 98, 064010 (2018)- p.6.
- 5) Jacobson, T. Einstein-Aether Waves/T.Jacobson, D.Mattingly.- *Phys.Rev.D70:024003,2004*- p.5.
- 6) Zlosnik, T. Modifying gravity with the Aether: an alternative to Dark Matter/T. G Zlosnik, P. G Ferreira, G. D Starkman.- *Phys.Rev.D75:044017,2007*- p.7.